Lessons touched by this meeting according to schedule:

* 18. 09/12/2024
  + Reducibility and r.e. sets [§9.1.3]
  + Alternative characterisation of r.e. sets [§7.2.3, §7.2.7]
  + Introduction to Rice-Shapiro's theorem [§7.2.16]
* 19. 10/12/2024
  + Rice-Shapiro's theorem. Proof, examples, counterexample to the converse implication [§7.2.16]

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, linea

Descrizione generata automaticamenteStill on predicates (logical implications):

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, schermata

Descrizione generata automaticamente

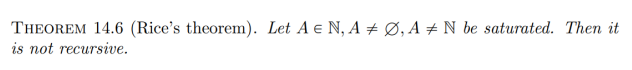
What does recursively enumerable mean?

* There is a countable number of steps for which a function is computable
* Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, bianco

  Descrizione generata automaticamenteConsequence: etymology theorem

Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, bianco

Descrizione generata automaticamente

This is used logically in parallel with Rice’s theorem:

This is one of the two ways to prove if a set is recursive; otherwise, for the previous one, use a set for which both domain/codomain are not computable by definition 🡪 K, the halting set!

Immagine che contiene testo, Carattere, schermata, linea

Descrizione generata automaticamente

The Rice-Shapiro theorem is a fundamental result in computability theory that characterizes the conditions under which a set of computable functions can be recursively enumerable

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere

Descrizione generata automaticamenteIt states that for a set of computable functions A ⊆ C, if the corresponding set of indices A = {x | φₓ ∈ A} is r.e., then for any function f, f ∈ A if and only if there exists a finite subfunction θ ⊆ f such that θ ∈ A.

1. A ⊆ C denotes a set of computable functions.
2. A = {x | φₓ ∈ A} represents the set of indices corresponding to the functions in A, where φₓ is the function computed by the xᵗʰ program in an enumeration of computable functions.
3. f ∈ A means that the function f belongs to the set A.
4. θ ⊆ f denotes that θ is a subfunction of f, i.e., dom(θ) ⊆ dom(f) and for all x ∈ dom(θ), θ(x) = f(x). In other words, θ agrees with f wherever θ is defined.
5. θ ∈ A signifies that the subfunction θ belongs to the set A.

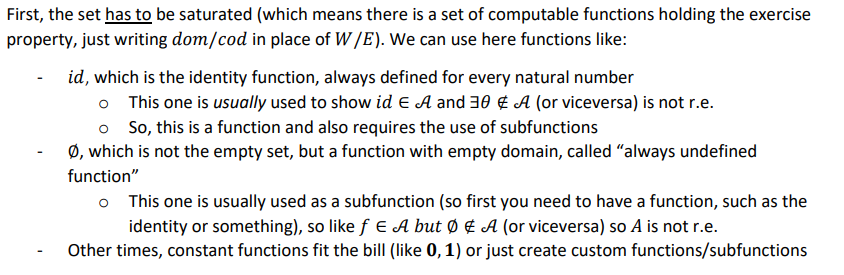


Immagine che contiene testo, Carattere, calligrafia, bianco

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamenteLet’s go now see many examples:

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, numero

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, Carattere, linea, algebra

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamenteOther similar recursiveness exercises:

Smn-theorem:

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, diagramma

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, calligrafia, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamenteImmagine che contiene testo, schermata, Carattere, documento

Descrizione generata automaticamente

Immagine che contiene testo, schermata, Carattere, algebra

Descrizione generata automaticamente

The s-m-n theorem states that given m, n ≥ 1, there is a computable total function sₘ,ₙ : Nᵐ⁺¹ → N such that for all e ∈ N, x⃗ ∈ Nᵐ, y⃗ ∈ Nⁿ:

φₑ⁽ᵐ⁺ⁿ⁾(x⃗,y⃗) = φₛₘ,ₙ(e,x⃗)⁽ⁿ⁾(y⃗)

We want to use the s-m-n theorem to prove there exists a total computable function s : N → N such that |Wₛ₍ₓ₎| = 2x.

Define the function f : N² → N as:

f(x,y) = y + 2x

This function is clearly computable:

f(x,y) = y + 2x

= y + μz.(z=2x)

= y + μz.(∃w.(w·2=z) ∧ w=x)

which shows f is computable since addition, equality checking, and bounded minimization are computable operations.

Viewed as a function of y with x as a parameter, f has domain N and codomain {y | y ≥ 2x}, so the set difference {y | y < 2x} has cardinality 2x.

By the s-m-n theorem, there exists a total computable function s : N → N such that for all x,y ∈ N:

φₛ₍ₓ₎(y) = f(x,y) = y + 2x

This function s satisfies the required property. For any x ∈ N:

|Wₛ₍ₓ₎| = |{y | φₛ₍ₓ₎(y)↓}|

= |{y | f(x,y)↓}|

= |N|

= ∞

|Eₛ₍ₓ₎| = |{φₛ₍ₓ₎(y) | y ∈ Wₛ₍ₓ₎}|

= |{y + 2x | y ∈ N}|

= |{y | y ≥ 2x}|

= |N| - |{y | y < 2x}|

= ∞ - 2x

= 2x

Therefore, the total computable function s obtained from the s-m-n theorem satisfies |Wₛ₍ₓ₎| = ∞ and |Eₛ₍ₓ₎| = 2x for all x ∈ N, proving the desired result.